Ein Lehrgang über negative Zahlen

Günther Malle, Wien

Aufbauend auf eine langjährige Forschungstätigkeit wurde von mir - gemeinsam mit Ulrike STEINBÖCK (im Rahmen einer Diplomarbeit) - ein Lehrgang über negative Zahlen entwickelt, der stärker als vergleichbare Lehrgänge didaktisches Hintergrundwissen einbezieht (vor allem empirische Untersuchungsergebnisse). Aus Platzgründen kann hier weder auf die didaktischen Hintergründe noch auf Details des Lehrganges eingegangen werden. Ich beschränke mich daher auf eine knappe Darstellung der wichtigsten Etappen des Lehrganges (Kopien des vollständigen Lehrganges können bei mir bezogen werden). Eine vereinfachte Fassung des Lehrganges, die allerdings einige Grundideen deutlicher hervortreten läßt, findet man in der Schülerzeitschrift „Mathe-Welt“ (Juni 1996).

1.Etappe: Gegensätzliches Deuten von Zahlen

In dieser Etappe sollen Schüler lernen, Zahlen je nach Vorzeichen unterschiedlich zu deuten, wobei diese Deutungen jedesmal in einer bestimmten Weise einander entgegengesetzt sind. Z.B. kann + 5 bzw - 5 bedeuten:

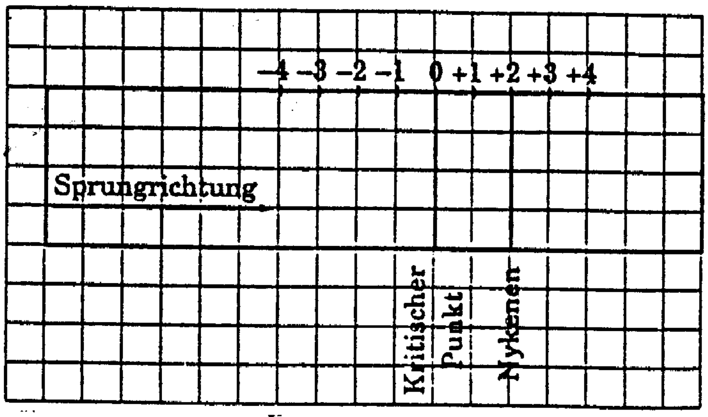
- 5° über Null bzw. 5° unter Null
- 5 m über dem Meer bzw. 5 m unter dem Meer
- 5 Jahre vor Christus bzw. 5 Jahre nach Christus

Die Aufgaben in dieser Etappe sind etwa von folgender Art:

1 Auf der Landepiste einer Schisprungschanze gibt es eine markierte Stelle, den sogenannten kritischen Punkt. Am Rand der Piste sind Markierungen im Abstand von jeweils einem Meter angebracht. In der Tabelle ist für einige Springer angegeben, wo sie aufgesetzt haben.

M. Nykenen	2 Meter nach dem kritischen Punkt
E. Vettori	1 Meter vor dem kritischen Punkt
A. Goldberger	3 Meter nach dem kritischen Punkt
A. Felder	2 Meter vor dem kritischen Punkt
J. Weisflog	1 Meter nach dem kritischen Punkt

Trage die Aufsprungstellen wie vorgegeben in die Zeichnung ein:

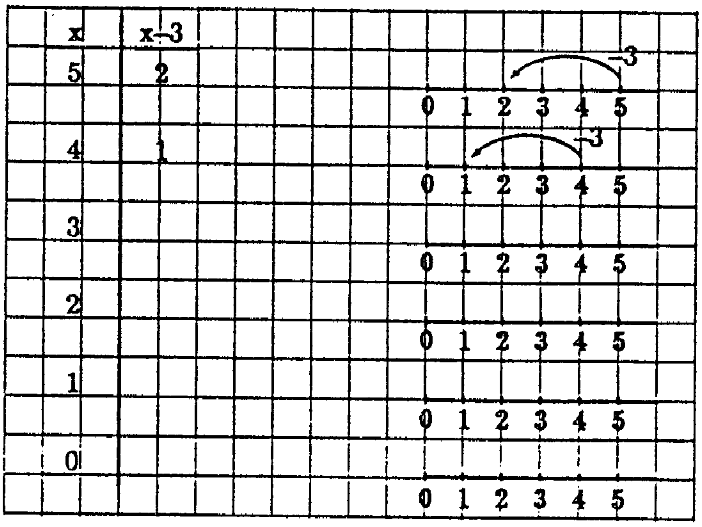


Insbesondere werden auch Aufgaben zu Kontoständen gestellt, wobei der Unterschied zwischen „Schulden" und „negativen Kontoständen" herausgearbeitet wird (die ersteren werden mit positiven, die letzteren mit negativen Zahlen angegeben).

Diese Phase entspricht dem Alltagsdenken über negative Zahlen und damit dem Vorwissen der Schüler. Man beachte, daß in dieser Etappe die negativen Zahlen noch keine eigenen Denkgegenstände (eigenständige Zahlen) sind. Es handelt sich um die alten (positiven) Zahlen, die lediglich in gegensätzlicher Weise gedeutet werden.

2. Etappe: Erweiterung des Zahlenstrahls und der Koordinatenachsen

2 Ergänze die Tabelle und stelle die Subtraktion jeweils wie angegeben auf dem Zahlenstrahl dar! Welche Schwierigkeit ergibt sich dabei und wie könnte man dem abhelfen?



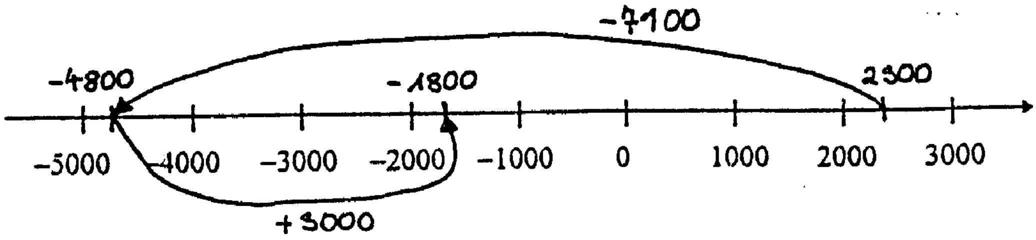
Diese Aufgabe soll die Schüler anregen, den Zahlenstrahl selbst nach links zu verlängern . In nachfolgen Aufgaben sollen Textaufgaben durch Rechnung gelöst und durch Zeichnungen dargestellt werden (ohne Verwendung irgendwelcher Regeln).

Zum Beispiel:

3 Frau Klaghammer hat auf ihrem Konto ein Guthaben von 2300 S. Sie kauft einen neuen Kleiderschrank, der 7100 S kostet. Eine Woche nach dem Kauf bekommt Frau Klaghammer von ihrem Untermieter die Miete bezahlt, die 3000 ausmacht. Sie legt das Geld auf ihr Konto ein. Wie hoch ist der Kontostand nach dem Kauf des Kleiderschranks? Zeichne und rechne!

Lösung:

Zeichnung:



Rechnung: 2300 - 7100 + 3000 = - 4800 + 3000 = -1800

Anschließend werden Figuren im ersten Quadranten eines Achsenkreuzes gezeichnet und so verschoben, gedreht oder gespiegelt, daß sie zum Teil in andere Quadranten fallen. Dabei sollen die Schüler einen Sinn der negativen Zahlen erkennen: Gäbe es keine negativen Zahlen, dann könnte man die Koordinaten der verschobenen, gedrehten oder gespiegelten Figuren nicht immer angeben.

Empirische Untersuchungen zeigen, daß diese Aufgaben für Schüler keine besonderen Probleme darstellen. Die negativen Zahlen sind noch immer keine eigenen Denkgegenstände, doch beginnen sich die Schüler an das Arbeiten mit ihnen zu gewöhnen.

3. Etappe: Ordnung der neuen Zahlen

Diesem Problem, das in gängigen Lehrbüchern oft gar nicht wahrgenommen wird, wird hier breiter Raum eingeräumt. Der Grund dafür liegt darin, daß empirische Untersuchungen ergeben haben, daß viele Schüler (und auch Erwachsene) die positiven und negativen Zahlen spiegelbildlich zueinander anordnen, auch wenn sie in der Schule die fortlaufende (lineare) Anordnung kennengelernt haben. Diese spiegelbildliche Anordnung von positiven und negativen Zahlen ist so tief im Denken der Kinder verankert, daß es im Unterricht beträchtlicher Anstrengungen bedarf, um sie davon loszureißen. Dazu ein kurzer Auszug aus dem Mathe-Welt-Heft:

Ein Knabe und ein Mädchen, Werner und Gerda, diskutieren die Frage, ob -5 kleiner oder größer als -3 ist:

Werners Argument:
Wenn ich 5 S Schulden habe, habe ich mehr Schulden, als wenn ich 3 S Schulden habe. Somit ist -5 größer als -3.

Gerdas Argument:
Wenn der Kontostand auf meinem Bankauszug -5 S beträgt, dann ist dies ein niedrigerer Kontostand als -3 S. Somit ist -5 kleiner als -3

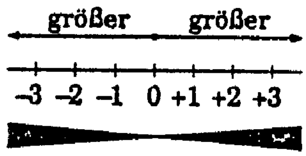
Etwas später diskutieren die beiden die Frage, ob -11 kleiner oder größer als -2 ist:

Werners Argument:
-11° C ist eine größere Kälte als -2° C. Somit ist -11 größer als -2.

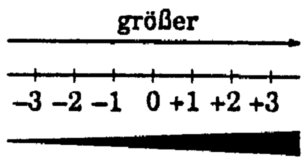
Gerdas Argument
-11° C ist eine niedrigere Temperatur als -2° C. Somit ist -11 kleiner als -2 .

Die beiden ordnen die Zahlen unterschiedlich an:

Werner ordnet die positiven und die negativen Zahlen spiegelbildlich an:



Gerda ordnet die positiven und die negativen Zahlen fortlaufend an:



Welche Anordnung ist nun die richtige? Diese Frage kann so nicht beantwortet werden. Beide Anordnungen haben etwas für sich. Da die negativen Zahlen Schöpfungen des Menschen sind, müssen wir auch selbst festlegen, welche Anordnung wir ihnen geben wollen. Die Mathematiker haben sich für Gerdas Anordnung entschieden. Warum, erfahrt Ihr nun!

Peter greift in den Streit ein:

Peters Argument:

Ihr werdet ja nicht bestreiten, daß:

$$7 < 9$$

Wenn wir auf beiden Seiten 6 abziehen, gilt natürlich immer noch die Kleinerbeziehung:

$$1 < 3$$

Was ist, wenn wir abermals auf beiden Seiten 6 abziehen:

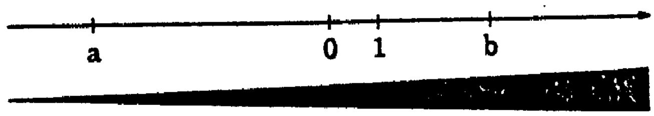
$$-5 \ldots -3$$

Welches Zeichen sollen wir jetzt dazwischen schreiben? Es wäre doch sehr zweckmäßig, wenn die Kleinerbeziehung auch in diesem Fall erhalten bliebe. Ich halte es daher für sinnvoll, festzusetzen:

$$-5 < -3$$

Peters Argument war in der Tat ein wesentlicher Grund für die Mathematiker, folgende Festsetzung zu treffen:

Für zwei Zahlen a und b gilt $a < b$ genau dann, wenn a auf der Zahlengeraden links von b liegt.



Im Lehrgang werden weitere Aufgaben gestellt, die die Schüler zu einer Reflexion der beiden Möglichkeiten der Anordnung anregen sollen, und in denen sie erkennen können, daß die fortlaufende Anordnung zweckmäßiger ist. Die negativen Zahlen werden ganz zaghaft eigene Denkobjekte. Man kann sie zumindest ordnen.

4. Etappe: Addition und Subtraktion der neuen Zahlen

Auch hier hat die empirische Forschung ein Problem zutage gefördert, das sehr häufig nicht wahrgenommen wird: Schüler sehen in Schreibweisen wie (+5)+(-3) oder (-2)-(-3) keinen Sinn und fühlen sich durch solche Schreibweisen geradezu vergewaltigt (auch wenn sie dies im Unterricht nur selten artikulieren). Dazu wiederum ein kurzer Auszug aus dem Mathe-Welt-Heft:

Äußerung einer Lehrerin:	Geheime Gedanken eines Schülers:
Wenn ihr +3 und -5 addieren wollt, müßt ihr schreiben:	So ein Blödsinn! Das geht viel einfacher
(+3)+(-5)=-2	3-5=-2
Kaiser Augustus wurde 63 v. Chr. geboren. Sein Lebensalter kann so berechnet werden:	Mein Gott, das ist doch klar! Er hat 63 Jahre vor Christus und 14 Jahre nach Christus gelebt. Daher beträgt sein Lebensalter:
(+14)-(-63)=77	63 + 14 = 77
Für die Gegenzahl -a einer Zahl a gilt:	Schon wieder so etwas! Warum kann die nicht schreiben:
a+(-a)=0	a - a = 0

Was hast Du denn?	Warum schreiben Sie alles so kompliziert auf, wenn es einfacher auch geht?

Dieses Mißverständnis kommt dadurch zustande, daß die Lehrerin und der Schüler Verschiedenes wollen.

Die Lehrerin möchte die Addition und Subtraktion negativer Zahlen erläutern und führt dazu neue Schreibweisen wie (+3)+(-5)=-2, (+14)-(-63)=77 usw. ein. Der Schüler möchte nur möglichst schnell zu einer Lösung der jeweiligen Aufgabe kommen und schreibt daher 3-5=-2, 63+14=77 usw.

Die Lehrerin denkt in negativen Zahlen (sie addiert und subtrahiert negative Zahlen) Der Schüler denkt lediglich in den alten positiven Zahlen (er addiert und subtrahiert lediglich positive Zahlen).

Im Lehrgang werden große Anstrengungen unternommen, Schülern zunächst zu erklären, warum Mathematiker sich partout darauf kaprizieren, Zahlen wie +5 und -3 oder -2 und -3 zu addieren oder zu subtrahieren, sowie intuitive Vorstellungen zu Schreibweisen wie (+5)+(-3) oder (-2)-(-3) zu erzeugen. Ausgangspunkt ist ein „Plus-Minus-Streifen":

-13	--------	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	----------	13

Damit werden verschiedene „Spiele" durchgeführt. Jeder Spieler setzt seinen Spielstein zunächst auf das Feld 0. Gewürfelt wird mit einem schwarzen Würfel („Pluswürfel") und einem roten Würfel („Minuswürfel"). Die Augenzahl des schwarzen Würfels wird nach rechts, die des roten Würfels anschließend nach links gezogen. Wer nach drei Durchgängen am weitesten rechts steht, hat gewonnen. (Spielvarianten: man würfelt zuerst rot und dann schwarz, zweimal hintereinander rot usw.) Die Spielzüge werden anfänglich real (später nur mehr in Gedanken) ausgeführt und die Spielzüge werden notiert, zunächst ohne Klammern. Zum Beispiel

bei schwarz 2 und schwarz 3:	2+3 = 5
bei schwarz 4 und rot 5:	4-5 = -1

Später erhalten die Schüler Klammervordrucke wie ( ) + ( ) = ( ) oder ( ) - ( ) = ( ), wobei die Spielregel vereinbart wird, daß ein Minuszeichen vor der Klammer bedeutet, daß das Gegenteil des in der Klammer stehenden Zuges auszuführen ist. Würfelt man etwa schwarz 1 und rot 4, dann trägt man ein: (+1) - (-4). Dies bedeutet: man zieht zuerst 1 nach rechts und führt anschließend das Gegenteil von „4 nach links" aus, zieht also 4 nach rechts. Man landet auf Feld 5 und schreibt:

$$(+1) - (-4) = (+5)$$

Bei diesen Spielen erhalten die *Vorzeichen* (in den Klammern) und die *Operationszeichen* zwischen den Klammern unterschiedliche Bedeutungen. Die ersteren werden als *Richtungen*, die letzteren als *Hintereinanderausführungen ohne bzw. mit Richtungsumkehr* interpretiert. Die Schüler sprechen etwa:

(+2) + (-5) = (-3)

2 nach rechts | 5 nach links | 3 nach links

und anschließend

(+2) - (-5) = (+7)

2 nach rechts | 5 nach links | 7 nach rechts

und anschließend das Gegenteil von

Empirische Untersuchungen haben gezeigt, daß die vielfach übliche Unterscheidung von Vorzeichen und Rechenzeichen (Operationszeichen) relativ wirkungslos bleibt, wenn sie nur auf der „Vokabelebene" vollzogen wird und dahinterliegende Bedeutungen fehlen. Diese sollen hier gerade aufgebaut werden.

Bezeichnet man die geworfenen Augenzahlen mit a und b (a,b positiv), dann hängen die hinzuzufügenden Vorzeichen davon ab, ob mit einem roten oder einem schwarzen Würfel geworfen wurde. Insgesamt ergeben sich acht mögliche Zugfolgen:

a) $(+a) + (+b) = a + b$	e) $(+a) - (+b) = a - b$
b) $(+a) + (-b) = a - b$	f) $(+a) - (-b) = a + b$
c) $(-a) + (+b) = -a + b$	g) $(-a) - (+b) = -a - b$
d) $(-a) + (-b) = -a - b$	h) $(-a) - (-b) = -a + b$

Diese Formeln beruhen zunächst noch auf willkürlich festgelegten Spielregeln. Im Lehrgang wird jedoch anschließend gezeigt, daß diese Festsetzungen auch sonst in der Mathematik sehr zweckmäßig sind. Zum Beispiel:

4 Der Unterschied U zweier positiver Zahlen kann bekanntlich so berechnet werden:

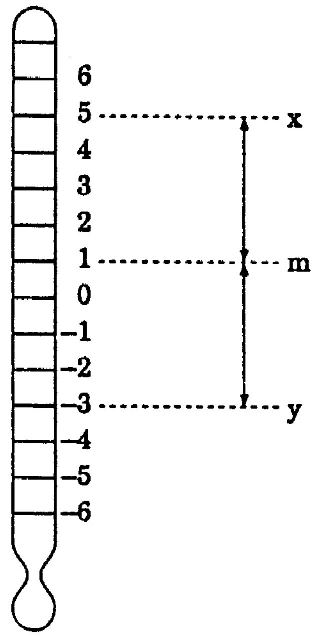
U = größere Zahl – kleinere Zahl

Es wäre schön, wenn diese Formel auch für negative Zahlen gelten würde. Der Unterschied der Zahlen –3 und 4 beträgt 7. Nach der obigen Formel ergäbe sich:

$$U = 4 - (-3)$$

Wie muß $(+a) - (-b)$ für positive Zahlen a, b festgesetzt werden, damit sich 7 ergibt? Wäre es zweckmäßig, $(+a) - (-b) = a - b$ zu setzen?

5 An einem bestimmten Ort beträgt die Morgentemperatur x = 5° C und die Mittagstemperatur y = -3° C. Die mittlere Vormittagstemperatur liegt in der Mitte zwischen 5° C und -3° C (siehe nebenstehendes Thermometer). Bekanntlich kann man den Mittelwert m zweier positiver Zahlen x und y nach der Formel berechnen:



$$m = \frac{x + y}{2}$$

Setzt man x = 5 und y = –3 ein, ergibt sich:

$$m = \frac{5 + (-3)}{2}$$

Wie muß (+a) + (–b) für positive Zahlen a, b festgelegt werden, damit sich m = 1 ergibt? Wäre es zweckmäßig, etwa (+a) + (–b) = a + b zu setzen?

Schließlich werden die obigen acht Formeln zur „offiziellen" Definition der Addition bzw. Subtraktion von positiven bzw. negativen Zahlen herangezogen. Die negativen Zahlen sind jetzt schon weitgehend eigene Denkgegenstände (Zahlen) geworden. Man kann sie immerhin ordnen, addieren und subtrahieren.

5. Etappe: Multiplikation und Division der neuen Zahlen

Wir kommen nun zum schwierigsten Problem bei der Behandlung der negativen Zahlen im Unterricht. Warum setzt man „minus mal plus gleich minus" und „minus mal minus gleich plus"? Empirische Untersuchungen haben gezeigt, daß kaum ein Schüler darauf etwas Sinnvolles antworten kann. Die Standardantwort war vielmehr: „Das habe ich nicht verstanden!" Das Problem wird in der Tat im allgemeinen viel zu oberflächlich behandelt (wenn diese Regeln nicht überhaupt auf dem Verordnungswege diktiert werden).

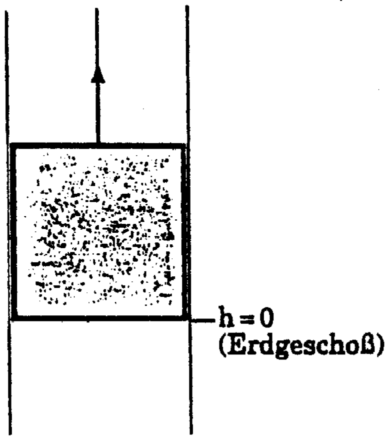
Während man sich bei der Addition und Subtraktion um den definitorischen Charakter der Formeln noch herumschwindeln kann, ist dies bei der Multiplikation nicht mehr möglich. Die Regeln der Multiplikation sind Definitionen und können daher weder aus anschaulichen Gegebenheiten abgelesen noch irgendwie „hergeleitet" werden, auch wenn manche es mit Hilfe einiger Zauberkunststückchen doch schaffen. (Von der Tatsache, daß bei einem axiomatischen Aufbau der Mathematik jede Definition auch ein Satz sein kann und umgekehrt, sehen wir hier natürlich ab; dies ist eine höhere Sichtweise, die hier nicht angemessen ist.)

Im Lehrgang wird nach dem Permanenzprinzip vorgegangen: Wenn man haben will, daß bestimmte Formeln (Verfahren, Deutungen usw.) auch im Negativen bestehen bleiben sollen, dann muß man die Multiplikation mit negativen Zahlen so und nicht anders festsetzen. Das Einleitungsbeispiel im Mathe-Welt-Heft sieht so aus:

Ein Aufzug bewegt sich mit der annähernd konstanten Geschwindigkeit von

$$4\,\frac{m}{s}$$

aufwärts



Zum Zeitpunkt t=0 befindet er sich in der Höhe h=0 (Erdgeschoß). Ergänze Tabelle 1!

Zeit	Höhe
0	0
1	4
2	8
3	
4	
5	

Tabelle 1

Zeit	Höhe
0	0
–1	–4
–2	–8
–3	
–4	
–5	

Tabelle 2

Man kann auch „negative Zeitpunkte" betrachten: Zum Zeitpunkt t = - 1, das heißt, eine Sekunde vor dem Passieren des Erdgeschosses, war der Aufzug 4 m unter dem Boden des Erdgeschosses, also in der Höhe h = - 4. Zum Zeitpunkt t = - 2, das heißt, zwei Sekunden vor dem Passieren des Erdgeschosses, war der Aufzug 8 m unter dem Boden des Erdgeschosses, also in der Höhe h = –8. Ergänze jetzt Tabelle 2!

Man kann die Höhe h des Aufzugs zum Zeitpunkt t nach folgender Formel ermitteln:

$$h = 4 \cdot t$$

Überprüfe diese Formel zunächst für positive Werte von t anhand von Tabelle 1!

Gilt diese Formel auch für negative Werte von t? Für t = –1, –2, –3, --- ergibt sich h = 4·(–1), 4·(–2), 4·(–3), ... Wir haben aber noch nicht festgesetzt, was man unter diesen Produkten verstehen soll.

Wir werden diese Festsetzungen so treffen, daß die Formel h = 4 • t auch für t = –1, –2, –3, ... gilt, also so, daß sich die Höhen aus Tabelle 2 ergeben. Offensichtlich muß man dazu setzen: 4 • (–1) = –4, 4 • (–2) = –8, 4 • (–3) = –12 usw.

Allgemein setzt man für positive Zahlen a, b:

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Überlege selbst: Würde die Formel $h = 4 \cdot t$ auch für negative Werte von t gelten, wenn wir $a \cdot (-b) = a \cdot b$ gesetzt hätten? Begründe!

Die Regel $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ wird analog erarbeitet, wobei sich der Aufzug abwärts bewegt. Anschließend wird an einer Reihe von Beispielen gezeigt, daß diese Festsetzungen zweckmäßig sind. Z.B. stellt die Gleichung $y = 2 \cdot x$ eine durchgehende Gerade dar, auch wenn x negativ ist. Dies wäre nicht der Fall, wenn wir etwa $a \cdot (-b) = a \cdot b$ gesetzt hätten.

Die Behandlung der Division weicht nicht vom Üblichen ab, weshalb auf diese hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Literatur:

MALLE, G. (1987): Zur Entwicklung der negativen Zahlen im Denken von Kindern. Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 15, 195 - 212.

MALLE, G. (1988): Die Entstehung neuer Denkgegenstände - untersucht am Beipiel der negativen Zahlen. In: Dörfler, W. (Hrsg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Hölder - Pichler - Temsky, Wien, und B.G. Teubner, Stuttgart.

MALLE, G. (1989): Die Entstehung negativer Zahlen als eigene Denkgegenstände. Mathematik lehren, Heft 35, 14 - 17.

MALLE, G. (1996): Negative Zahlen, Mathe-Welt, Heft 76.

STEINBÖCK, U. (1996): Geschichte, Epistemologie und Didaktik der negativen Zahlen. Diplomarbeit, Universität Wien.

Univ-Prof. Dr. Günther Malle
Universität Wien
Institut für Mathematik
Strudlhofgasse 4
1090 Wien